حرکت‌های ممکن یک توپ بین دو صفحه‌ی موازیِ چرخان

محمود بهمن‌آبادی

دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی ۹۱۶۱ ـ ۱۱۱۵۵

در این مقاله حرکت‌های ممکن توپ صلبی را که بدون لغزش بین دو صفحه‌ی نامتناهی موازی می‌غلتد بررسی می‌کنیم. دو صفحه به اندازه‌ی قطر توپ فاصله دارند و هر صفحه حول محور ثابتی که بر آن صفحه عمود است می‌چرخد.

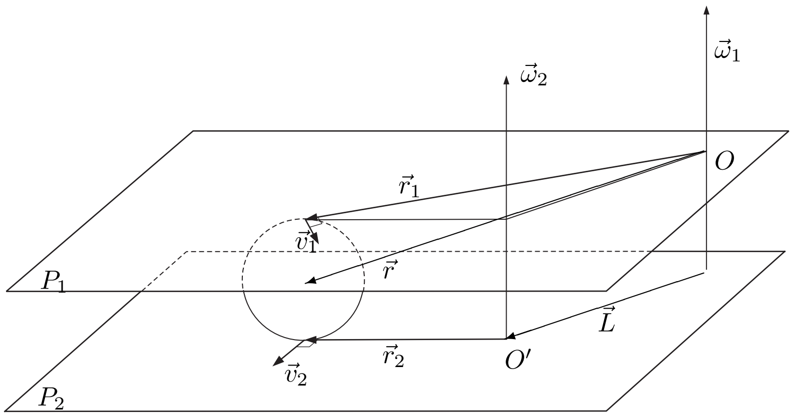
۱ معادله‌های حرکت توپ

دو صفحه‌ی موازی P_1 و P_2 به فاصله‌ی $2\,R$ از هم اند. این دو صفحه به ترتیب با سرعت زاویه‌ای ω_1 و ω_2 حول دو محور L_1 و L_2 که بر صفحه‌ها عمود اند، می‌چرخند. توپ صلبی به شعاع R بین این دو صفحه است. توپ در نقاط تماس با صفحه‌ها نمی‌لغزد. می‌خواهیم حرکت‌های ممکن این توپ را بررسی کنیم. برای حل این مسئله، و برای راحت‌تر شدن محاسبه‌ها، فرض می‌کنیم صفحه‌ی xy منطبق بر P_1 است و محور z هم بر محور L_1 منطبق است (شکل ۱ را ببینید). به این ترتیب نقطه‌ی برخورد محور L_1 با صفحه‌ی P_1 مبداء مختصّه‌ها است.

نمادگذاری:

O مبداء مختصّه‌ها، یعنی $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{P}_1$.

$\boldsymbol{r}$ برداری که O را به مرکز توپ وصل می‌کند.



شکل ۱:

A نقطه‌ی تماس توپ با P_1.

$\boldsymbol{r}_1$ برداری که O را به A وصل می‌کند.

O' محل تلاقی P_2 با L_2، یعنی $\mathrm{L}_2 \cap \mathrm{P}_2$.

B نقطه‌ی تماس توپ با P_2.

$\boldsymbol{r}_2$ برداری که O' را به B وصل می‌کند.

$\boldsymbol{v}_1$ بردار سرعت نقطه‌ی A.

$\boldsymbol{v}_2$ بردار سرعت نقطه‌ی B.

$\boldsymbol{L}$ برداری موازی P_1 و P_2 که L_1 را به L_2 وصل می‌کند.

Ω بردار سرعت زاویه‌ای توپ، نسبت به مرکز توپ.

$\boldsymbol{R}$ برداری که مرکز توپ را به A وصل می‌کند (که موازی L_1، یعنی ω_1 است).

چون نقطه‌های تماس توپ با صفحه‌ها نمی‌لغزند، معادله‌های قیدی حرکت برای نقطه‌های A و B عبارت اند از:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1 = \Omega \times \boldsymbol{R} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_2 = \Omega \times (-\boldsymbol{R}) + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2}$$

با جمع کردن این دو تساوی داریم

$$2\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_2 \tag{3}$$

معادله‌های (1) و (2) هیچ قیدی روی Ω_z، مؤلفه‌ی z ـِ Ω، نمی‌گذارند.

مختصه‌های نقطه‌ی A را $(x, y, 0)$ می‌گیریم و بردارها را در دستگاه دکارتی xyz می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} - R\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{L} = (x - L_x)\ \hat{\boldsymbol{x}} + (y - L_y)\ \hat{\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

با جای‌گزین کردن این‌ها در (3) به دست می آوریم

$$2\ (\dot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\,\hat{\boldsymbol{y}}) = \omega_1\,\hat{\boldsymbol{z}} \times (x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}}) + \omega_2\,\hat{\boldsymbol{z}} \times [(x - L_x)\ \hat{\boldsymbol{x}} + (y - L_y)\ \hat{\boldsymbol{y}}] \tag{7}$$

از این جا داریم

$$2\,\dot{x} + (\omega_1 + \omega_2)\ y - \omega_2\,L_y = 0 \tag{8}$$

$$2\,\dot{y} - (\omega_1 + \omega_2)\ x + \omega_2\,L_x = 0 \tag{9}$$

برای حل این دو معادله‌ی جفت شده کافی است از یکی مشتق بگیریم و در دیگری جاگذاری کنیم.

$$\ddot{x} + \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\ \frac{\omega_2}{2}\,L_x = 0 \tag{10}$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 y - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\ \frac{\omega_2}{2}\,L_y = 0 \tag{11}$$

با تعریف

$$\omega := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{12}$$

جواب معادله‌ی 10 به صورت زیر خواهد بود.

$$x(t) = A\,\sin\omega t + B\,\cos\omega t + \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,L_x \tag{13}$$

اگر از این معادله مشتق بگیریم و در معادله‌ی (8) جاگذاری کنیم، y به دست می آید.

$$y(t) = B\,\sin\omega t - A\,\cos\omega t + \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,L_y \tag{14}$$

و البته این در (11) صدق می‌کند. دو معادله‌ی (13) و (14) را می‌توانیم ترکیب کنیم، که به معادله‌ی زیر منجر می‌شود.

$$\left(x - \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,L_x\right)^2 + \left(y - \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,L_y\right)^2 = A^2 + B^2 \tag{15}$$

از این معادله پیدا است که توپ روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع a حرکت می‌کند:

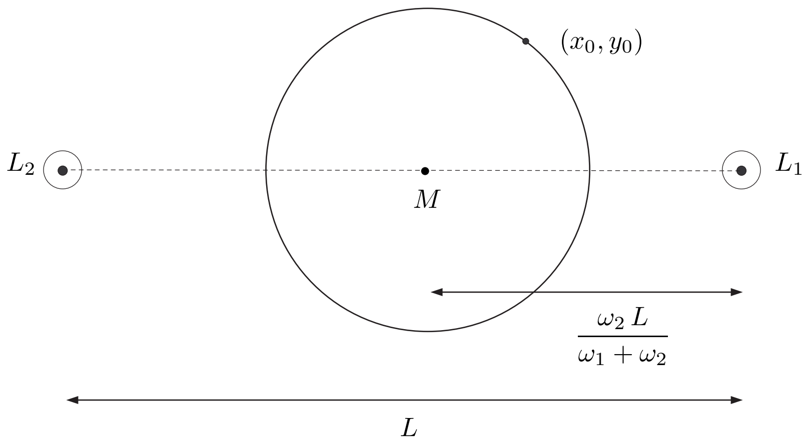
$$M = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,(L_x, L_y)\,, \qquad a = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{16}$$

(L_x, L_y) مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{L}$ است که L_1 را به L_2 وصل می‌کند (و موازی صفحه‌ها است). بنا بر این مرکز دایره‌ای که توپ روی آن حرکت می‌کند، یعنی نقطه‌ی M، در امتداد بردار $\boldsymbol{L}$ است. شعاع دایره، a، به شرایط اولیّه بستگی دارد.

در شکل ۲ مسیر توپ برای حالتی که مکان اوّلیّه‌ی آن (x_0, y_0) بوده رسم شده است. روشن است که اگر فاصله‌ی بین دو محور L_1 و L_2 برابر L باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی M تا محور L_1 برابر $\dfrac{\omega_2\,L}{\omega_1 + \omega_2}$ خواهد بود. با توجه به معادله‌های (13) و (14) پیدا است که دوره‌ی تناوب حرکت توپ

$$\tau := \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{4\,\pi}{\omega_1 + \omega_2} \tag{17}$$

است. در یک حالت خاص که مثلاً صفحه‌ی P_2 ساکن باشد $(\omega_2 = 0)$ توپ بر روی دایره‌ای حول محور z می‌غلتد. در این حالت دوره‌ی تناوب توپ $\tau = \dfrac{4\,\pi}{\omega_1}$ است، یعنی دو برابر دوره‌ی چرخش صفحه‌ی P_1.



شکل ۲:

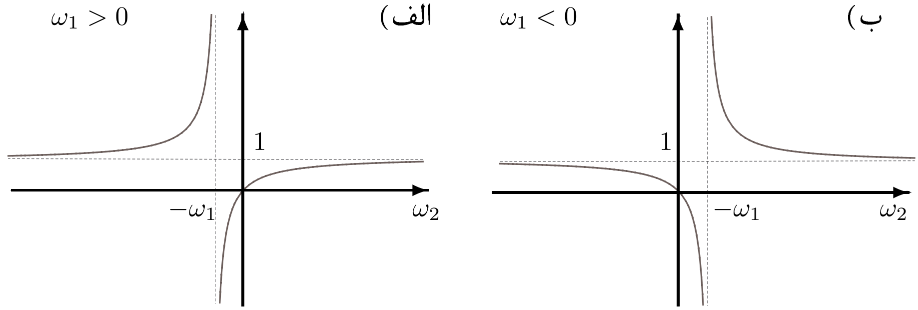
۲ حالت‌های مختلف حرکت توپ

برای بررسی حالت‌های مختلف حرکت توپ، چون مرکز دایره‌ی حرکت متناسب با $S = \dfrac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$ است، ابتدا رفتار این تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_2} = \frac{\omega_1}{(\omega_1 + \omega_2)^2} \tag{18}$$

پس اگر ω_1 مثبت باشد، S تابعی صعودی از ω_2 است، و اگر ω_1 منفی باشد، S تابعی نزولی از ω_2 است. شکل ۳ نمودار $S(\omega_2)$ را برای $\omega_1 > 0$ و $\omega_1 < 0$ نشان می‌دهد. منحنی‌های شکل ۳ در واقع نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی مرکز مسیر توپ از محور L_1 اند.

اگر مرکز مسیر دایره‌ای توپ، یعنی M، به اندازه‌ی Δr جابه‌جا شود، توپ روی مسیر جدیدی حرکت می‌کند که مکان اوّلیه‌ی مسیر جدید یکی از نقاط مسیر قبلی است. در شکل ۴ ابتدا توپ روی مسیر C_1 با مرکز M_1 حرکت می‌کند. اگر وقتی توپ در نقطه‌ی A است، مرکز M_1 به M_2 منتقل شود، مسیر حرکت C_2 خواهد بود. اگر وقتی توپ در نقطه‌ی B است، مرکز M_1 به M_2 منتقل شود، مسیر حرکت C_3 خواهد بود. اگر موقع انتقال مرکز از M_1 به M_2 توپ در نقطه‌ای دیگر از C_1 باشد، مسیر دایره‌ای دیگری خواهد داشت. تمام مسیرهای ممکن در ناحیه‌ی هاشورزده‌ی شکل ۴ قرار دارند.



شکل ۳:

اکنون حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. سه حالت $\omega_1 > 0$، $\omega_1 < 0$، و $\omega_1 = 0$ را در نظر می‌گیریم. جهت مثبت محور x را از L_1 به L_2 می‌گیریم. این حالت‌ها را با ثابت گرفتن ω_1 و تغییر ω_2 بررسی می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

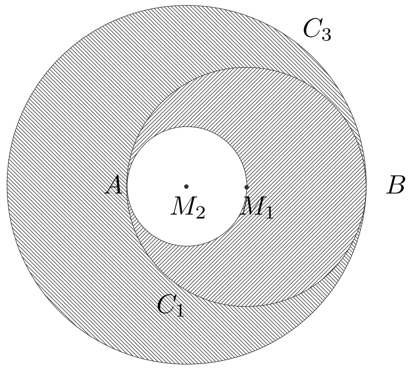
$$K = \frac{d\omega_2}{dt} \tag{19}$$

یازده حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{llll}
\omega_1 > 0 & K > 0 & \omega_2 > -\omega_1 & 1 \\
\omega_1 > 0 & K > 0 & \omega_2 < -\omega_1 & 2 \\
\omega_1 > 0 & K < 0 & \omega_2 > -\omega_1 & 3 \\
\omega_1 > 0 & K < 0 & \omega_2 < -\omega_1 & 4 \\
\omega_1 > 0 & K = 0 & & 5 \\
\omega_1 < 0 & K > 0 & \omega_2 > -\omega_1 & 6 \\
\omega_1 < 0 & K > 0 & \omega_2 < -\omega_1 & 7 \\
\omega_1 < 0 & K < 0 & \omega_2 > -\omega_1 & 8 \\
\omega_1 < 0 & K < 0 & \omega_2 < -\omega_1 & 9 \\
\omega_1 < 0 & K = 0 & & 10 \\
\omega_1 = 0 & & & 11
\end{array} \tag{20}$$

حالت 1) $\omega_1 > 0$، $K > 0$، و $\omega_2 > -\omega_1$

مطابق شکل ۳ الف، در حالت $\omega_2 > -\omega_1$، وقتی ω_2 بزرگ شود $(K > 0)$، S به سمت یک میل می‌کند یعنی مرکز مسیر توپ به به سمت محور L_2 می‌رود. اگر مسیر اوّلیه‌ی توپ را



شکل ۴:

با دایره‌ی C_1 نشان دهیم، بسته به این که این دایره محور L_2 را در بر بگیرد یا نگیرد دو محدوده‌ی معین را می‌توانیم به دست آوریم که با افزایش ω_2 توپ می‌تواند در آن جا باشد. در شکل ۵ این دو حالت نشان داده شده است.

حالت 2) $\omega_1 > 0$، $K > 0$، و $\omega_2 < -\omega_1$

باز مطابق شکل ۳ الف، در حالت $\omega_2 < -\omega_1$، وقتی ω_2 بزرگ می‌شود ($K > 0$)، S به سمت $+\infty$ می‌رود، یعنی مرکز مسیر توپ به $+\infty$ میل می‌کند. چون در این حالت همواره $S > 1$ است بنا بر این مرکز توپ هیچ گاه بین دو محور L_1 و L_2 نیست و به L_2 نزدیک‌تر است. در این حالت توپ در همه جا می‌تواند حضور داشته باشد.

حالت 3) $\omega_1 > 0$، $K < 0$، $\omega_2 > -\omega_1$

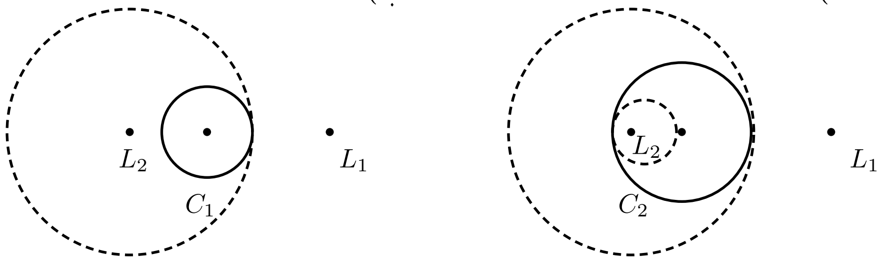
مطابق شکل ۳ الف، چون ω_2 کم می‌شود ($K < 0$)، بالاخره ω_2 برابر با $-\omega_1$ می‌شود. در نتیجه مرکز مسیر توپ به $-\infty$ میل می‌کند. در این حالت نیز برای توپ نمی‌توانیم بدون حل معادله‌ی مسیر محدوده‌ی معینی مشخص کنیم.

حالت 4) $\omega_1 > 0$، $K < 0$، $\omega_2 < -\omega_1$

در این حالت نیز چون همواره $S > 1$ است (شکل ۳ الف)، مرکز مسیر توپ بین دو محور نیست و به L_2 نزدیک‌تر است. در ضمن با افزایش ω_1، ω_2 کم می‌شود ($K < 0$)، پس S به سمت 1 میل می‌کند، یعنی مرکز مسیر توپ به سمت L_2 می‌رود. این وضعیت مشابه حالت 1 است. دو حالت ممکن در شکل ٦ نشان داده شده است.

الف)

ب)



شکل ۵: الف) مسیر اوّلیه، C_1، شامل L_2 است. محدوده‌ای که توپ می‌تواند باشد بین دو دایره‌ی خط‌چین است. ب) مسیر اوّلیه، C_1 شامل L_2 نیست. محدوده‌ای که توپ می‌تواند باشد داخل دایره‌ی خط‌چین است.

حالت 5) $\omega_1 > 0$ و $K = 0$

در این حالت ω_2 تغییر نمی‌کند ($K = 0$)، پس برای هر مقدار مشخص ω_1 مسیر توپ همان مسیر اوّلیه باقی می‌ماند و تغییر نمی‌کند.

حالت 6) $\omega_1 < 0$، $K > 0$، و $\omega_2 > -\omega_1$

مشابه حالت‌های 1 و 4 است.

حالت 7) $\omega_1 < 0$، $K > 0$، و $\omega_2 < -\omega_1$

مشابه حالت‌های 2 و 3 است، و تنها با حل معادله‌ی مسیر محدوده‌ی معینی مشخص می‌شود.

حالت 8) $\omega_1 < 0$، $K < 0$، و $\omega_2 > -\omega_1$

مشابه حالت‌های 2 و 3 و 7 است.

حالت 9) $\omega_1 < 0$، $K < 0$، و $\omega_2 < -\omega_1$

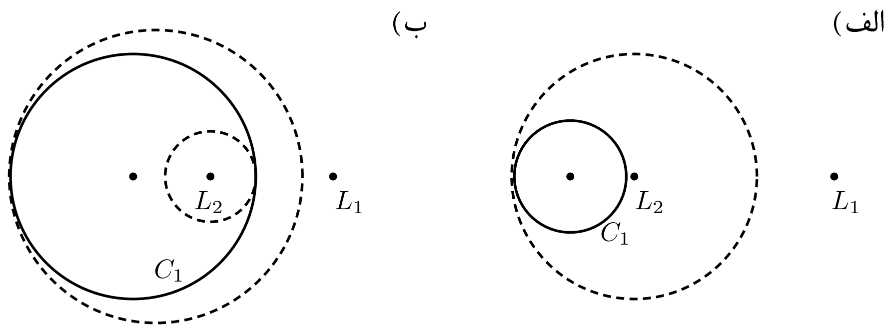
مشابه حالت‌های 1 و 4 و 6 است.

حالت 10) $\omega_1 < 0$ و $K = 0$

مشابه حالت 5 است.

حالت 11) $\omega_1 = 0$

S همواره برابر 1 است و مسیر حرکت توپ یک دایره به مرکز L_2 است و با افزایش یا کاهش



شکل ٦: الف) مسیر اوّلیه، C_1 شامل L_2 نیست. محدوده‌ای که توپ می‌تواند باشد داخل دایره‌ی خط‌چین است. ب) مسیر اوّلیه، C_1، شامل L_2 است. محدوده‌ای که توپ می‌تواند باشد بین دو دایره‌ی خط‌چین است.

ω_2 تغییر نمی‌کند.

۳ قدردانی

از پیمان خرسند، که بخشی از این مسئله را برای امتحان المپیاد فیزیک کشور مطرح کرده بود تشکّر می‌کنم.