گاما، شماره یِ ۲۳، تابستانِ ۱۳۸۹

کنش و زمانِ گسسته ‡

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-047 (2007/09/13)

کنش، معادله یِ حرکت، و تقارن‌ها برا یِ یک سیستمِ زمان‌گسسته بررسی می‌شود.

0 مقدمه

بر اساسِ فرمول‌بندی یِ کنش در مکانیکِ کلاسیک، متناظر با هر سیستم یک کنش هست که تابع ی از مسیر در یک بازه یِ زمانی و آن بازه یِ زمانی است. مسیرِ کلاسیک (جوابِ معادله یِ حرکت) آن مسیر ی است که وردشِ کنش نسبت به آن در زمان‌ها یِ درونی صفر شود. می‌گویند سیستم در زمان موضعی است، اگر این کنش انتگرالِ یک تابع (لگرانژی) رو یِ بازه یِ زمانی باشد و این لگرانژی تابعِ زمان، مسیر در آن زمان، و تعدادِ باپایان ی از مشتق‌ها یِ زمانی یِ مسیر در آن زمان باشد. اگر فقط مشتقِ اول در لگرانژی ظاهر شده باشد، می‌گویند کنش از مرتبه یِ یک است. تقارنِ نُتِری به یک خانواده یِ یک‌پارامتری یِ تبدیل‌ها ی وارون‌پذیر (بر پیکربندی‌ها) می‌گویند که نسبت به پارامتر مشتق‌پذیر است و کنش را به یک کنشِ هم‌ارز تبدیل می‌کند. چنین‌تقارن ی به یک ثابتِ حرکت می‌انجامد. این‌ها را می‌شود در مثلاً [1] یافت. این‌جا قرار است همین موارد برا یِ سیستم‌ها یِ با زمانِ گسسته بررسی شود.

1 کنش و معادله یِ حرکت

سیستم ی را در نظر بگیرید که با یک تابع از $\mathbb{Z}$ (مجموعه یِ عددها یِ صحیح) به یک مجموعه (فضا یِ پیکربندی) توصیف می‌شود. به هر یک از این تابع‌ها یک مسیر می‌گوییم. هر مسیر را می‌شود با مجموعه یِ

‡این مقاله، با اجازه یِ نویسنده از منزل‌گاه نویسنده برداشته شده است، و همه ی حقوقِ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.
http://www.mamwad.org/x1/x1-047.pdf

$\{q^i(\tau)\mid(i,\tau)\}$ نشان داد. τ (زمان) پارامتر ِ گسسته یِ تحول است. به q^i ها متغیرها یِ دینامیکی یِ سیستم می‌گوییم. برا یِ این سیستم تحول ی با معادله یِ

$$\forall\ (i,\tau)\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=0 \tag{1}$$

(معادله یِ تحول یا معادله یِ حرکت) می‌نویسیم. $\mathbf{q}$ یک نماد ِ کلی برا یِ q^i ها است، و $\mathcal{E}_i$ ها تابعی‌ها یی از $\mathbf{q}$ و زمان اند. می‌گوییم این سیستم با کنش ِ S توصیف می‌شود، اگر

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=\frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q^i(\tau)}, \tag{2}$$

که S در $\mathbb{R}$ (مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) مقدار می‌گیرد.

می‌گوییم کنش موضعی و از مرتبه یِ n است اگر

$$\forall\ \mathbf{q}\ :\ S(\mathbf{q})=\sum_\tau S\left[\tau;\mathbf{q}\left(\tau-\frac{n}{2}\right),\dots,\mathbf{q}\left(\tau+\frac{n}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

برا یِ کنش ِ از مرتبه یِ یک، از (2) و (3) نتیجه می‌شود

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=\frac{\partial S[\tau+\iota;\mathbf{q}(\tau),\mathbf{q}(\tau+1)]}{\partial q^i(\tau)}+\frac{\partial S[\tau-\iota;\mathbf{q}(\tau-1),\mathbf{q}(\tau)]}{\partial q^i(\tau)}, \tag{4}$$

که

$$\iota:=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

تعریف می‌کنیم

$$p_i^+(\tau):=+\frac{\partial S[\tau-\iota;\mathbf{q}(\tau-1),\mathbf{q}(\tau)]}{\partial q^i(\tau)},$$

$$p_i^-(\tau) := -\frac{\partial S[\tau+\iota;\mathbf{q}(\tau),\mathbf{q}(\tau+1)]}{\partial q^i(\tau)}. \tag{6}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q}) = p_i^+(\tau) - p_i^-(\tau). \tag{7}$$

2 تقارنِ نُتِری و ثابتِ حرکت

می‌گوییم نگاشتِ وارون‌پذیرِ $\mathcal{O}$ از مجموعه یِ مسیرها به مجموعه یِ مسیرها یک تقارنِ کنش است اگر

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ S\{\tau;[\mathcal{O}(\mathbf{q})](\tau-\iota),[\mathcal{O}(\mathbf{q})](\tau+\iota)\} = {}& S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),(\mathbf{q})(\tau+\iota)]\\ &+\Lambda(\tau+\iota)-\Lambda(\tau-\iota),\end{aligned} \tag{8}$$

که Λ در $\mathbb{R}$ مقدار می‌گیرد. می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارنِ نُتِری یِ سیستم است، اگر

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ \left.\frac{\partial S[\tau;(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})(\tau-\iota)+(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})(\tau+\iota)]}{\partial s}\right|_{s=0} = {}&\lambda(\tau+\iota)\\ &-\lambda(\tau-\iota),\end{aligned} \tag{9}$$

که λ در $\mathbb{R}$ مقدار می‌گیرد.

فرض کنید $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارنِ نُتِری یِ سیستم است. در این صورت از (9) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ \lambda(\tau+\iota)-\lambda(\tau-\iota) = {}& G^i(\tau-\iota)\,\frac{\partial S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),\mathbf{q}(\tau+\iota)]}{\partial q^i(\tau-\iota)}\\ &+G^i(\tau+\iota)\,\frac{\partial S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),\mathbf{q}(\tau+\iota)]}{\partial q^i(\tau+\iota)},\end{aligned} \tag{10}$$

یا

$$\forall\,(\tau,\mathbf{q})\ :\ p_i^{+}(\tau+\iota)\,G^i(\tau+\iota)-\lambda(\tau+\iota)-p_i^{-}(\tau-\iota)\,G^i(\tau-\iota)+\lambda(\tau-\iota)=0. \quad (11)$$

از ترکیب ِ این با (7) نتیجه می‌شود

$$\forall\,(\tau,\mathbf{q})\ :\ (p_i^{+}\,G_i-\lambda)(\tau+\iota)-(p_i^{+}\,G_i-\lambda)(\tau-\iota)=-\mathcal{E}_i(\tau-\iota,\mathbf{q})\,G^i(\tau-\iota), \quad (12)$$

یا

$$\forall\,(\tau,\mathbf{q})\ :\ (p_i^{-}\,G_i-\lambda)(\tau+\iota)-(p_i^{-}\,G_i-\lambda)(\tau-\iota)=-\mathcal{E}_i(\tau+\iota,\mathbf{q})\,G^i(\tau+\iota). \quad (13)$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهند رو ی ِ لاک (وقت ی معادله ی ِ حرکت برقرار است) کمیت ِ I ثابت ِ حرکت است، که

$$I:=p_i\,G^i-\lambda. \quad (14)$$

در این رابطه p را می‌شود p^+ یا p^- گرفت. این‌دو رو ی ِ لاک یک‌سان اند.

3 حد ِ زمان‌پی‌وسته

زمان ِ t را از رو ی ِ زمان ِ گسسته ی ِ τ و تیک‌زمانی ی ِ Δ به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$t:=\tau\,\Delta. \quad (15)$$

از تابع ِ $\mathbf{q}$ که رو ی ِ زمان ِ گسسته تعریف شده یک تابع ِ $\mathbf{Q}$ تعریف می‌کنیم که رو ی ِ زمان ِ پی‌وسته تعریف شده:

$$\mathbf{Q}(\tau\,\Delta):=\mathbf{q}(\tau). \quad (16)$$

به این ترتیب دیده می‌شود

$$\mathbf{Q}(\tau\,\Delta) = \frac{\mathbf{q}(\tau+\iota)+\mathbf{q}(\tau-\iota)}{2} + o(\Delta),$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(\tau\,\Delta) = \frac{\mathbf{q}(\tau+\iota)-\mathbf{q}(\tau-\iota)}{\Delta} + o(\Delta), \tag{17}$$

که $o(\Delta)$ کمیت ی است که سریع‌تر از Δ به صفر می‌گراید. برا یِ یک کنش ِ مرتبه‌یِ‌یک لگرانژی تعریف می‌کنیم.

$$L(t;\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}) := \frac{S[\tau;\mathbf{Q}-\iota\,\Delta\,\dot{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}+\iota\,\Delta\,\dot{\mathbf{Q}}]}{\Delta}. \tag{18}$$

از رابطه‌ها یِ (6) دیده می‌شود

$$p_i^{+}(\tau) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right|_{t-\iota\,\Delta} + \frac{\partial L}{\partial Q^i}\,\iota\,\Delta,$$

$$p_i^{-}(\tau) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right|_{t+\iota\,\Delta} - \frac{\partial L}{\partial Q^i}\,\iota\,\Delta. \tag{19}$$

با تعریف ِ

$$P_i(t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}, \tag{20}$$

نتیجه می‌شود

$$p_i^{+}(\tau) = P_i(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial Q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right)\right]\,\iota\,\Delta + o(\Delta),$$

$$p_i^{-}(\tau) = P_i(t) - \left[\frac{\partial L}{\partial Q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right)\right]\,\iota\,\Delta + o(\Delta). \tag{21}$$

به این ترتیب از (7) نتیجه می‌شود

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})}{\Delta}=\frac{\partial L}{\partial Q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right). \tag{22}$$

دیده می‌شود که طرف ِ راست وردش ِ کنش ی با لَگرانژی یِ L نسبت به مسیر است. یعنی معادله‌یِ‌حرکت ِ زمان‌گسسته، در حد ِ زمان ِ پی‌وسته به معادله‌یِ‌حرکت ِ زمان‌پی‌وسته تبدیل می‌شود.

از (14) و (21) ضمناً نتیجه می‌شود اگر $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ نُترِی باشد، در حد ِ زمان‌پی‌وسته ثابتِ‌حرکت ِ متناظر (I) می‌شود

$$I=P_i\,G^i-\lambda. \tag{23}$$

4 مرجع

[1] محمد خرمی؛ ” تقارن و فرمول‌بندی یِ لَگرانژی، I“، X1-015 (2003/03/21)