تقارن، ثابت‌هایِ حرکت، و انتگرال‌پذیری

فرهنگ لران، کیوان آقابابائی سامانی

دانشکده ی فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان،۸۳۱۱۱ - ۸۴۱۵۶

چکیده

رابطه‌ی میان تقارن وثابت‌های حرکت در فرمول‌بندی‌های لاگرانژی و همیلتونی را با بررسی چند مثال ساده بیان می‌کنیم و فرمول‌بندی کلی را در حد مقدماتی ارائه می‌کنیم. به همین ترتیب مفاهیم انتگرال‌پذیری و ابرانتگرال‌پذیری دست‌گاه‌های کلاسیک را مرور می‌کنیم.

گاما، شماره ی ۲۵، مقاله ی ۵ (زمستان ۱۳۹۱) ویرایش ۱ (۱۳۹۱/۱۲/۱۱)

Abstract

The relationship between symmetries and constants of motion in Lagrangian and Hamiltonian formalism of classical mechanics is investigated through some examples. The general formalism is discussed in an introductory level. The notions of integrability and superintegrability in classical systems are discussed in the same manner.

Farhang Loran, Keivan Aghababaei Samani; *Symmetries, constants of motion, and integrability*;
Gamma, no. 25, art. 5 (Winter 2013), v. 1 (1 Mar 2013)

URL: http://www.gammajournal.ir

فهرست مطالب

۱ مقدمه

موضوعی که در این مقاله مورد مطالعه قرار می‌گیرد بررسی رابطه‌ی میان ثابت‌های حرکت و تقارن‌های یک مسأله است؛ موضوعی که به‌طور دقیق با *قضیه‌ی نوتر* بیان می‌شود. بر اساس این قضیه، هر تقارن سرتاسری متناظر با یک ثابت حرکت است. ما در این مقاله صورت‌بندی کلی این قضیه را که مثلاً در مراجع [۱، ۲] آمده است نمی‌آوریم، بلکه صورت‌بندی‌ای را ارائه می‌کنیم که در بیشتر مسائل متعارف فیزیک کلاسیک به کار می‌آید. مثلاً خواهیم دید که قانون پایستگی تکانه‌ی خطی نتیجه‌ی تقارن کنش تحت انتقال در فضا است. برای فهمیدن این موضوع حرکت یک ذره به جرم m در راستای x را در نظر بگیرید. اگر نیرویی به ذره وارد نشود همه‌ی نقاط محور x هم ارز هستند. ولی اگر ذره در یک پتانسیل حرکت کند، نقاط مختلف محور x با هم فرق می‌کنند. این تفاوت، خیلی ساده، ناشی از تفاوت مقدار تابع پتانسیل در آن نقاط است. اگر همه‌ی نقاط محور x شبیه هم باشند، می‌شود مبدأ دستگاه را به هر اندازه‌ی دلخواهی به راست یا چپ انتقال داد و این کار تغییری در فیزیک دست‌گاه ایجاد نمی‌کند. از طرف دیگر می‌دانیم که اگر پتانسیل عدد ثابتی باشد، نیرویی به ذره وارد نمی‌شود و در نتیجه تکانه پایسته است.

حالا فرض کنید که پتانسیل ثابت نیست، یعنی نیرو داریم و تکانه پایسته نیست. در این مسأله انرژی مکانیکی، که جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، پایسته است. پایستگی انرژی مکانیکی ناشی از تقارن انتقالی در زمان است. برای فهمیدن این که این مسأله تحت انتقال در زمان تقارن دارد، توجه کنید که معادله‌ی حرکت نیوتن، نیرو را به حاصل‌ضرب جرم در شتاب ربط می‌دهد. شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است و در نتیجه مقدارش به انتخاب مبدأ زمان بستگی ندارد. اگر جرم ذره در زمان ثابت باشد و نیرو هم تابع صریحی از زمان نباشد، انتقال در زمان، تقارن مسأله است.

به این ترتیب در حرکت یک‌بعدی اگر نیروها فقط تابعی از مکان باشند، پایستار اند و قانون پایستگی انرژی برقرار است. البته ممکن است نیرو تابع صریحی از زمان نباشد ولی انرژی مکانیکی هم ثابت حرکت نباشد مانند نیروی اصطکاک.

در حالت کلی، معادلات دینامیکی (بنیادی و یا مؤثر) حاکم بر یک دست‌گاه (مثلاً میدان‌های کلاسیک) نه لزوماً از معادلات نیوتن بلکه از اصل کم‌ترین کنش به دست می‌آید. برای مثال فرض کنید دینامیک دست‌گاهی با معادله‌ی

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} - f(x) = 0,$$

داده شده است. این دست‌گاه تحت انتقال در زمان متقارن است. چه کمیتی نظیر انرژی مکانیکی در مکانیک نیوتنی می‌شود برای آن تعریف کرد؟

در این مقاله ما عمدتاً در مورد دست‌گاه‌یی صحبت می‌کنیم که می‌توان برای‌شان لاگرانژی یا همیلتونی نوشت. البته مثال‌هایی از دست‌گاه‌هایی که نمی‌توان برای آن‌ها لاگرانژی نوشت نیز ارائه خواهد شد. در بخش اول این مقاله صورت‌بندی کلی تقارن‌ها و ارتباط‌شان با کمیت‌های پایسته را ارائه می‌کنیم. هرچند برای روشنی بحث این کار را در چارچوب حل مسأله‌های ساده‌ای مثل نوسان‌گر هماهنگ ساده یا ذره‌ی آزاد انجام می‌دهیم.

در بخش دوم مفهوم انتگرال‌پذیری و ابرانتگرال‌پذیری را بررسی می‌کنیم. برای نمونه مسأله‌ی حرکت آزاد یک ذره روی محور x را در نظر بگیرید. اگر مکان اولیه و انرژی جنبشی دستگاه را بدانیم سرنوشت آن را مشخص کرده‌ایم (البته دانستن جهت سرعت اولیه هم لازم است، بدون آن فقط مسیر حرکت معلوم است و نه جهت حرکت). برای ذره‌ی آزاد دیدیم که پایستگی انرژی نتیجه‌ی تقارن انتقالی در زمان است.[۱] جلوتر نشان می‌دهیم که مکان اولیه‌ی ذره در عمل، «بار» پایسته‌ی نظیر تقارن تحت تبدیل خیز گالیله است. به این ترتیب این دست‌گاه که یک درجه‌ی آزادی دارد، دو کمیت بقادار دارد. به چنین دست‌گاهی ابرانتگرال‌پذیر می‌گویند. حالا فرض کنید که این ذره تحت اثر یک نیرو باشد. در این صورت، در حالت کلی، تقارن انتقالی و تقارن خیز نداریم و فقط انرژی مکانیکی بقا دارد. به این ترتیب یک درجه‌ی آزادی داریم و یک ثابت حرکت. به این مسأله انتگرال‌پذیر می‌گویند.

ترتیب ارائه‌ی مطالب در این مقاله از این قرار است. در بخش بعدی رابطه‌ی تقارن‌ها و کمیت‌های پایسته را مطالعه می‌کنیم. ابتدا تقارن انتقال در زمان و سپس تقارن‌هایی مثل انتقال و خیز را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم مفاهیم انتگرال‌پذیری و ابرانتگرال‌پذیری را مرور می‌کنیم. خواننده باید توجه کند که این مقاله صرفاً با هدف معرفی موضوع نوشته شده است. هرچند فرمول‌بندی به‌نحوی ارائه شده که به راحتی قابل تعمیم، به‌ویژه به نظریه‌ی میدان‌های کلاسیک، باشد. پیش‌نهاد می‌کنیم که خواننده برای دیدن جزئیات بیشتر به مراجع [۱، ۲] برای بخش دوم و مرجع [۳] برای بخش سوم مراجعه کند.

۲ تقارن‌های نوتر

۲-۱ تقارن انتقال در زمان

معادله‌یِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده‌ای به جرمِ m و ثابتِ فنرِ k از این قرار است،

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0\,, \tag{1}$$

که در آن

$$\dot{x} = \frac{d\,x}{dt}. \tag{2}$$

[۱] در مسأله‌ی ذره‌ی آزاد تقارن انتقالی هم داریم که به معنای پایستگی تکانه است. از آنجا که انرژی مکانیکی در این مسأله همان انرژی جنبشی است، انرژی کمیت مستقلی از تکانه نیست.

در این مسأله انرژیِ مکانیکی که با رابطه‌ی

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{3}$$

داده می‌شود، ثابتِ حرکت است. برایِ تحقیقِ درستیِ این ادعا کافی است ببینیم آیا E با زمان تغییر می‌کند یا نه. اگر E ثابتِ حرکت باشد، مشتقِ زمانیِ آن باید صفر باشد،

$$\dot{E} = \dot{x}\,(m\,\ddot{x} + k\,x) = 0. \tag{4}$$

در به دست آوردن تساوی دوم از معادله‌ی حرکت (1) استفاده کرده‌ایم. این نتیجه را می‌شود در فرمول‌بندی لاگرانژی و با استفاده از اتحادِ نوتر به دست آورد. لاگرانژیِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده را می‌شود به این صورت نوشت،

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{5}$$

تنها دلیلی که برایِ نوشتن این لاگرانژی داریم این است که معادله‌یِ اویلر-لاگرانژِ نظیرِ آن که با

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\right) L(x, \dot{x}) = 0 \tag{6}$$

داده می‌شود هم‌ارزِ معادله‌یِ حرکتِ نیوتن (1) می‌شود. اگر به این لاگرانژی یک جمله‌یِ جدید به صورتِ زیر اضافه کنیم،

$$L(x, \dot{x}) \to L'(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + \frac{d}{dt} F(x) \tag{7}$$

که در آن $F(x)$ تابعِ مشتق‌پذیرِ دل‌خواهی از مکان باشد، این لاگرانژی هنوز هم خوب است، یعنی معادله‌یِ حرکتِ درستِ (1) را می‌دهد چرا که

$$\frac{d}{dt} F(x) = \dot{x}\, \frac{d}{dx} F(x) \tag{8}$$

و در نتیجه

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\dot{x}\frac{d}{dx} F(x)\right) = 0\ . \tag{9}$$

به‌کمک معادله‌های (11) و (21) که در پی خواهد آمد می‌توان دید که در این مسأله تقارنِ انتقال در زمان تقارنِ نوتری است. یعنی مسأله‌یِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده تحتِ تبدیلِ زیر ناوردا است،

$$t \;\to\; t' = t + \epsilon \tag{10}$$

$$x(t) \;\to\; x'(t') = x(t) \tag{11}$$

که در آن ϵ یک ثابتِ بی‌نهایت کوچک است. تحتِ این تبدیل

$$\delta x(t) = x'(t) - x(t) = x(t - \epsilon) - x(t) = -\epsilon \dot{x} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{12}$$

و منظورمان از $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ جمله‌های دیگری است که از بسط تیلور $x(t-\epsilon)$ به دست می آیند ولی از مرتبه ی‌های بالاترِ ϵ هستند. طبقِ قضیه‌ی نوتر، بارِ پایسته‌ی نظیرِ این تقارن با عبارتِ

$$Q = (\delta_\epsilon x)\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x,\dot{x}) + L(x,\dot{x}) \tag{13}$$

داده می‌شود که در آن

$$\delta_\epsilon x = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x'(t)-x(t)}{\epsilon} = -\dot{x} \tag{14}$$

معلوم است که $Q=-E$. هرچند ما این نتیجه را از صورت‌بندیِ عمومیِ قضیه‌یِ نوتر نوشته‌ایم ولی خوب است ببینیم در این مثالِ خاص این نتیجه چطور به دست می‌آید. کنشِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده با رابطه‌یِ زیر داده می‌شود،

$$S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau L(x,\dot{x},\tau) \tag{15}$$

که در آن t_i و t_f زمانِ آغاز و پایان حرکت را نشان می‌دهند. بنابراین، از تبدیلِ انتقال در زمان داریم،

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i'}^{t_f'} d\tau L(x'(\tau),\dot{x}'(\tau),\tau) - \int_{t_i}^{t_f} d\tau L(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\\ &= \delta_1 S + \delta_2 S\end{aligned} \tag{16}$$

که در آن

$$\delta_1 S = \left(\int_{t_i+\epsilon}^{t_f+\epsilon} d\tau - \int_{t_i}^{t_f} d\tau\right) L(x,\dot{x}) = \epsilon(L_f - L_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{17}$$

جمله‌ای است که از تغییر در کرانِ بالا و پایینِ کنش به دست آمده و منظور از L_i و L_f هم، مقدارِ لاگرانژی در آغاز و پایانِ مسیر است. هم‌چنین،

$$\delta_2 S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \left(\delta x\frac{\partial L}{\partial x} + \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \frac{d}{dt}\left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \tag{18}$$

که در به دست آوردنِ تساویِ دوم از معادله‌یِ اویلر- لاگرانژ (6) استفاده کرده‌ایم.
حالا زمانِ مناسبی است که معنای تقارنِ انتقالِ زمانی را آشکارتر کنیم. روشن است که اگر لاگرانژی بسته‌گیِ صریحی به زمان نداشته باشد، آن‌گاه در معادله‌یِ (16) داریم

$$\int_{t_i'}^{t_f'} d\tau' L(x'(\tau'),\dot{x}'(\tau')) = \int_{t_i}^{t_f} d\tau L(x(\tau),\dot{x}(\tau)) \tag{19}$$

چراکه بر اساس تعریف (11) داریم

$$L(x'(t'),\dot{x}'(t')) = L(x(t),\dot{x}(t))\ , \tag{20}$$

و در نتیجه

$$\delta S = 0. \tag{21}$$

در نوشتنِ جمله‌ی سمتِ چپِ معادله‌ی (19)، فقط نامِ متغیرِ انتگرال‌گیری را عوض کرده‌ایم ولی همان‌طور که گفتیم، در به دست آوردنِ تساوی و نوشتنِ سمت راست آن از تعریفِ (11) استفاده کرده‌ایم. واضح است که مثلاً اگر لاگرانژیِ یک نوسان‌گرِ واداشته با نیرویِ خارجیِ $f(t)$ را نوشته بودیم که علاوه بر (5) شاملِ جمله‌یِ

$$L_f = f(t)\, x \tag{22}$$

نیز بود، تساویِ (20) دیگر برقرار نبود. این دقیقاً به این معنا است که برایِ نوسان‌گرِ واداشته تقارنِ انتقال در زمان که با (11) داده می‌شود را نداریم.

از معادلاتِ (17) و (18) معلوم است که اگر $\delta S = 0$ آن‌گاه

$$\left((\delta_\epsilon x)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + L\right)_f = \left((\delta_\epsilon x)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + L\right)_i \tag{23}$$

که این به معنایِ بقایِ بارِ نوترِ Q (13)، در طولِ مسیر از i تا f است.

به‌عنوان یک مثال دیگر از دست‌گاه‌هایی که لاگرانژی آن‌ها تابع صریحی از زمان است، معادله‌ی یک نوسان‌گر میرا را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0\,, \tag{24}$$

این معادله‌ی حرکت از کنش زیر به دست می‌آید

$$S = \int dt\, e^{\frac{b}{m}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2\right)\,. \tag{25}$$

به روشنی می‌بینیم که در این مورد، تساوی (20) برقرار نیست زیرا

$$L(x'(t'), \dot{x}'(t')) = e^{b/m(t'-t)} L(x(t), \dot{x}(t))\,.$$

۲-۲ تقارن تحت انتقال و خیز

فرمول‌بندیِ لاگرانژی در یافتنِ کمیت‌های بقادارِ نظیرِ تقارن‌هایِ مسأله خیلی کارآمد است. به عنوانِ مثال مسأله‌یِ ذره‌یِ آزاد با یک درجه‌یِ آزادی (ذره‌یِ آزادِ یک بعدی) را در نظر بگیرید. این دست‌گاه تقارنِ انتقالی و تقارنِ خیزِ گالیله‌ای دارد که به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند،

$$x(t) \;\rightarrow\; x'(t') = x(t) + \epsilon \tag{26}$$

$$t \;\rightarrow\; t' = t \tag{27}$$

که در آن ϵ پارامترِ انتقالِ بی‌اندازه کوچک است، و

$$\begin{aligned} x(t) \;&\rightarrow\; x'(t') = x(t) + vt \\ t \;&\rightarrow\; t' = t \end{aligned} \tag{28}$$

که در آن v پارامترِ خیزِ بی‌اندازه کوچک است. v در واقع سرعتِ ناظرِ دست‌گاهِ (x', t') نسبتِ به ناظرِ دست‌گاهِ (x, t) است. در فرمول‌بندیِ نیوتنی که مسأله با معادله‌ی حرکت‌اش یعنی با

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0 \tag{29}$$

داده می‌شود واضح است که هر دوی این تبدیلات تقارن مسأله هستند، چرا که

$$m\frac{d^2}{dt'^2}x'(t') = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0. \tag{30}$$

یعنی این تبدیلات معادله‌ی حرکت را تغییر نمی‌دهند. اما در این فرمول‌بندی معلوم نمی‌شود که کمیتِ (بارِ) پایسته‌ی نظیر این دو تقارن چیست. در رهیافتِ لاگرانژی، این کمیتِ پایسته با رهیافتِ نوتر داده می‌شود و بارِ نوتر نام دارد.

با تقارنِ انتقالی شروع می‌کنیم. اگر لاگرانژیِ این دست‌گاه را بنویسیم،

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{31}$$

آن‌گاه تحتِ تبدیلِ انتقال

$$\delta x = \epsilon \qquad \delta\dot{x} = 0 \tag{32}$$

و در نتیجه

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{33}$$

معنایِ این رابطه روشن است. معادله‌ی حرکت تحتِ تبدیلِ انتقال تغییر نمی‌کند و در نتیجه این تبدیل یک تقارنِ مسأله است. آن وقت از قضیه‌ی نوتر می‌دانیم که در موردِ تقارنِ انتقالی، کمیتِ پایسته،

$$Q = (\delta_\epsilon x)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{34}$$

همان تکانه‌ی دست‌گاه است. در به دست آوردنِ تساوی دوم از تعریفِ (14) استفاده کرده‌ایم که در این‌جا به صورتِ زیر داده می‌شود،

$$\delta_\epsilon x = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x'(t) - x(t)}{\epsilon} = 1 \tag{35}$$

ممکن است بپرسید که چرا عبارتی که برای بارِ نوترِ Q در (13) نوشته‌ایم با آن‌چه که در (34) آورده‌ایم فرق دارد. علتِ این تفاوت این است که در (13) بارِ نوتر را برای تبدیلی نوشتیم که در آن پارامترِ t تغییر می‌کرد در حالی که در تبدیلِ انتقال t تغییری نمی‌کند. یادآوری می‌کنیم جمله‌یِ $L(x, \dot{x})$ که در معادله‌یِ (13) آمده ولی در (34) دیده نمی‌شود از $\delta_1 S$ می‌آمد که ناشی از وردشِ کنش به واسطه‌یِ تغییر در حدودِ انتگرال‌گیری بود.

همان‌طور که می بینید تقارنِ انتقالی با تقارنِ انتقالِ زمانی متفاوت است. در اولی پارامترِ زمان تغییر می‌کند و وردشِ x (یعنی درجه‌یِ آزادیِ دست‌گاه) از آن ناشی می‌شود (روابطِ (11) و (12) را ببینید) در حالی که در تقارنِ انتقالی یا هر تقارنی از این دست، پارامترِ t تغییری نمی‌کند و تقارن به معنایِ بی‌تفاوتیِ معادله‌یِ حرکت نسبتِ به تغییرِ ویژه‌ای در «میدان»هایی است که نماینده‌یِ درجاتِ آزادیِ مسأله اند. برایِ روشن شدنِ بیش‌ترِ موضوع ما بارِ نوترِ (34) را نیز محاسبه می‌کنیم.

قضیه: اگر تحتِ تبدیلِ

$$
\begin{aligned}
x(t) &\rightarrow x'(t) = x(t) + \epsilon\phi(t,x) \\
t &\rightarrow t' = t
\end{aligned}
\tag{36}
$$

لاگرانژی به شکل زیر تغییر کند

$$
L(x', \dot{x'}) = L(x, \dot{x}) + \epsilon \frac{d}{dt} F(t,x)
\tag{37}
$$

آن‌گاه کمیت

$$
Q = \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \epsilon F(t,x) \ .
\tag{38}
$$

در طولِ حرکت پایسته است.

برای اثبات این قضیه کافی است نشان دهیم اگر معادله‌یِ اویلر-لاگرانژ (6) برقرار باشد آن‌گاه $\dot{Q} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\dot{Q} &= \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \epsilon \frac{d}{dt} F(x) \\
&= \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} - \delta L \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

که در نوشتنِ تساویِ دوم از معادله‌یِ اویلر-لاگرانژ (6) و فرضِ (37) استفاده کرده‌ایم.

با مقایسه‌یِ روابطِ (36) و (37) می‌شود رابطه‌یِ $\phi(t,x)$ و $F(t,x)$ را به شکلِ عمومی به دست آورد

$$
\phi \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} F \ ,
\tag{40}
$$

حالا تبدیل‌هایِ انتقال و خیز برایِ ذره‌یِ آزاد را مطالعه می‌کنیم. در موردِ تبدیلِ انتقال

$$
\delta L = m\,\dot{x}\,\delta\dot{x} = 0
\tag{41}
$$

و در نتیجه $F(x) = 0$. پس بارِ نوتر با رابطه‌یِ (34) داده می‌شود. در موردِ تبدیلِ خیز،

$$
\delta\dot{x} = v
$$

$$
f = t,
$$

$$
\epsilon = v
$$

پس $\delta L = m\,\dot{x}\,\delta\dot{x} = m\,v\,\dot{x}$، یعنی $F(x) = m(x-c)$، که c یک ثابت است. به این ترتیب بارِ نوتر برایِ تبدیلِ خیز برای ذره‌یِ آزاد عبارتست از

$$Q = m\dot{x}t - m(x-c) = m(-x_0 + c) \tag{42}$$

که در آن x_0 مکانِ اولیه است.

تمرین: نوسان‌گر هماهنگ ساده را که لاگرانژی آن در رابطه‌ی (5) داده شده است، در نظر بگیرید. با تحلیل معادله‌ی (40) نشان دهید این دست‌گاه علاوه بر تقارن انتقال زمانی که منجر به پایسته‌گی انرژی مکانیکی می‌شود، تحت تبدیل $x \to x + a\cos(\omega t + \theta)$ نیز تقارن دارد. در این رابطه a یک ثابت بی‌نهایت کوچک و θ یک ثابت دلخواه است و $\omega = \sqrt{k/m}$. ثابت‌های حرکت نظیر این تبدیل را به‌دست آورید. نشان دهید انرژی مکانیکی را می‌توان برحسب این ثابت‌های حرکت نوشت.

پیش از پایان این بخش مثال نامتعارفی از یک تقارن و قانون پایستگی متناظر با آن را بررسی می‌کنیم: دو مکعب با فنری به هم وصل شده اند و این مجموعه روی یک میز است. بین مکعب‌ها و سطح میز اصطکاک هست، اما همه‌ی نقاط میز مثل هم اند، یعنی فضا در این مسأله هم‌گن است. معادله‌های حرکت این دست‌گاه عبارت اند از

$$m_1\,\ddot{x}_1 = \kappa(x_2 - x_1) - b_1\dot{x}_1\,, \tag{43}$$

$$m_2\,\ddot{x}_1 = -\kappa(x_2 - x_1) - b_2\dot{x}_2\,. \tag{44}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، معادله‌های این دست‌گاه با انتقال روی میز عوض نمی‌شوند، اما، علی‌رغم این هم‌گنی، تکانه‌ی کل دست‌گاه، یعنی مجموع تکانه‌های دو ذره، ثابت نیست. این مسأله تقارن خیز گالیله‌ای هم ندارد. با یک مشتق‌گیری ساده و استفاده از معادله‌های حرکت می‌توان دید که در این مسأله کمیت زیر ثابت حرکت است

$$Q = m_1\,\dot{x}_1 + m_2\,\dot{x}_2 + b_1\,x_1 + b_2 x_2\,, \tag{45}$$

در حالت خاصی که $\frac{b_1}{m_1} = \frac{b_2}{m_2} = \gamma$ می‌توان ثابت فوق را از روش ارائه شده در این مقاله به‌دست آورد. در این حالت معادلات حرکت از لاگرانژی زیر به‌دست می‌آیند

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2\right)\,. \tag{46}$$

به ساده‌گی می‌توان دید که اگر در تبدیل (36) بگیریم $\delta x_1 = \delta x_2 = \epsilon\phi(t)$ و $\phi(t) = e^{-\gamma t}$، آن‌گاه ثابت حرکتی که از معادله‌ی (38) به دست می‌آید عبارت است از $Q = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، این مسأله تحت انتقال نیز تقارن دارد و شکل لاگرانژی فوق نیز این را نشان می‌دهد، ثابت حرکت متناظر با تقارن انتقالی یعنی $\delta x_1 = \delta x_2 = \epsilon$، کمیت $P(t) = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ نیست بلکه «تکانه‌ی کانونیک» Q_γ است:

$$Q_\gamma = e^{\gamma t}P(t)\,, \tag{47}$$

ثابت بودن Q_γ به این معنی است که در این مسأله $P(t)$ با گذشت زمان به شکل $e^{-\gamma t}$ کاهش می‌یابد.

۳-۲ ثابت‌های حرکت در فرمول‌بندی همیلتونی

یافتن ثابتِ حرکت در فرمول‌بندیِ همیلتونی آسان‌تر است. در این فرمول‌بندی دینامیکِ دست‌گاه با یک همیلتونی داده می‌شود. برای مثال، همیلتونی نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده از این قرار است،

$$H(x,p) = \dot{x}\,p - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\,x^2 \tag{48}$$

که در آن $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x}$ تکانه‌یِ نوسان‌گر است. معادلاتِ حرکت در فرمول‌بندیِ همیلتونی به صورت زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} \\ \dot{p} &= \{p, H\} \end{aligned} \tag{49}$$

که در آن نمادِ $\{\ ,\ \}$ کروشه‌یِ پواسون نام دارد و با دستور زیر تعریف می‌شود،

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{50}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که کروشه‌ی پواسون مختصات فضای فاز x و p عبارت است از

$$\{x,x\} = 0, \qquad \{x,p\} = 1, \qquad \{p,p\} = 0 \tag{51}$$

با تعریف بالا، تحولِ زمانی هر تابعی از مختصاتِ فضایِ فاز (که بسته‌گیِ صریحی به زمان نداشته باشد) را می‌توان به شکل

$$\frac{d}{dt} f = \{f, H\} \tag{52}$$

نوشت. کارِ سختی نیست که نشان بدهیم برای هر تابعِ مشتق‌پذیرِ دل‌خواهی از مختصاتِ فضایِ فاز

$$\{f,f\} = 0 \tag{53}$$

و از این جا نتیجه بگیریم که در هر مساله‌ای، H ثابتِ حرکت است چرا که $\{H,H\} = 0$. در موردِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ ساده می‌شود دید که به طورِ مقداری، $H = E$.

۳ انتگرال‌پذیری و ابرانتگرال‌پذیری

در بخش‌های قبل دیدیم که وجود تقارن‌ها و ثابت‌های حرکت می‌تواند به ما کمک کند درک به‌تری از حرکت دست‌گاه به‌دست آوریم و همین‌طور بتوانیم پیش‌بینی‌هایی در مورد انواع حرکت‌های ممکن دست‌گاه داشته باشیم. اگر توجه خود را به فضای فاز معطوف کنیم درک این موضوع ساده‌تر می‌شود. در فرمول‌بندی همیلتونی ثابت حرکت تابعی از مختصات فضای فاز است (فعلاً ثابت‌های حرکتی را در نظر می‌گیریم که تابع صریح زمان نباشند). برای دست‌گاهی که n درجه‌ی آزادی دارد، فضای فاز $2n$ بعدی است. بنابراین وجود m ثابت حرکت (مستقل) به این معنی است که حرکت در فضای فاز به یک زیرفضای $2n-m$ بعدی محدود می‌شود. از آنجا

که کوچک‌ترین زیرفضای ممکن در فضای فاز یک بعدی است (در یک زیرفضای صفر بعدی اصولاً حرکتی وجود ندارد)، بیش‌ترین تعداد ثابت‌های حرکت ممکن $2n-1$ است. در ادامه این مفاهیم را با دقت بیش‌تری بررسی می‌کنیم.

دست‌گاهی با n درجه‌ی آزادی را در نظر بگیرید. این دست‌گاه را می‌توان با همیلتونی آن توصیف کرد. همیلتونی تابعی از متغیرهای مکانی q_i و تکانه‌های نظیر آن‌ها p_i است. معادله‌های حرکت دست‌گاه به شکل زیر داده می‌شود

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ \ , \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{54}$$

دست‌گاه انتگرال‌پذیر خوانده می‌شود هرگاه دارای n ثابت مستقل حرکت باشد که دوبه‌دو جابه‌جاشونده باشند (یعنی کروشه‌ی پواسون هر زوج از آن‌ها صفر باشد). با این تعریف هر دست‌گاه یک بعدی که همیلتونی آن تابع صریح زمان نباشد انتگرال‌پذیر است.

ممکن است دست‌گاهی بیش از n ثابت حرکت مستقل داشته باشد (که البته در این صورت کروشه‌ی پواسون هر زوج از آن‌ها لزوماً صفر نخواهد بود). اگر دست‌گاهی بیش از n ثابت حرکت مستقل داشته باشد و انتگرال‌پذیر هم باشد (یعنی n تا از ثابت‌های حرکت آن دوبه‌دو جابه‌جاشونده باشند) در این صورت می‌گوییم دست‌گاه ابرانتگرال‌پذیر است. بیش‌ترین تعداد ممکن برای ثابت‌های حرکت مستقل (که تابع صریح زمان نیستند) $2n-1$ است. در این حالت دست‌گاه را کاملاً ابرانتگرال پذیر می‌خوانیم.

ثابت حرکت می‌تواند تابع صریح زمان نیز باشد. در صورت وجود ثابت‌های حرکتی که تابع صریح زمان‌اند بیش‌ترین تعداد ثابت‌های حرکت $2n$ است. در ادامه سعی می‌کنیم با ارائه‌ی مثال‌هایی مفاهیم فوق را بهتر درک کنیم

۳-۱ نیروی مرکزی و مسأله‌ی کپلر:

حرکت یک ذره را تحت اثر یک نیروی مرکزی که در مختصات کروی با پتانسیل $U(r)$ داده می‌شود، در نظر بگیرید. همیلتونی این ذره عبارت است از

$$H = p_r^2 + r^2\, p_\theta^2 + r^2\, \sin^2\theta\, p_\phi^2 + U(r)$$

این مسأله دو ثابت حرکت شناخته شده دارد: انرژی (یا خود همیلتونی) و تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L} = p_\phi \hat{z}$ توجه کنید که تکانه‌ی زاویه‌ای یک بردار است و ثابت بودن آن به معنی وجود سه ثابت حرکت است. بنابر این اولاً این مسأله ابرانتگرال پذیر است زیرا بیش از سه ثابت حرکت دارد. ثانیاً کروشه‌ی پواسون هر زوج از چهار ثابت فوق صفر نخواهد بود.

نکته‌ی جالب این است که در مسأله‌ی کپلر که با پتانسیل $U(r) = -\frac{k}{r}$ داده می‌شود، این‌ها تمام ثابت‌های حرکت نیستند. در این صورت مسأله دارای یک بردار ثابت دیگر است که به نام بردار لاپلاس-رانگ-لنز شناخته می‌شود [۱]:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\, k\, \hat{r}$$

بنابراین این مسأله کاملاً ابرانتگرال‌پذیر است.

۲-۳ دست‌گاه‌های جداپذیر

در برخی مسائل می‌توان متغیرهای دست‌گاه را به دو یا چند بخش مجزا تقسیم کرد به‌طوری که تحول زمانی‌ی متغیرهای یک بخش فقط به متغیرهای همان بخش بسته‌گی داشته باشد. در چنین مواردی می‌توان در مورد ابرانتگرال‌پذیری هر بخش به‌طور جداگانه صحبت کرد. به مثال زیر توجه کنید:

دو ذره را در نظر بگیرید که می‌توانند روی یک میز بدون اصطکاک حرکت کنند و میان آن‌ها برهم‌کنشی وجود دارد که فقط به فاصله‌ی میان دو ذره بسته‌گی دارد. پتانسیل این برهم‌کنش را با $U(r)$ نشان می‌دهیم. اگر مختصات مرکز جرم این مجموعه را با (X,Y) نشان دهیم و مختصات نسبی ذره‌ی 2 نسبت به ذره‌ی 1 را با (r,θ) نشان دهیم، همیلتونی این دست‌گاه به شکل زیر خواهد بود:

$$H=\frac{P^2}{2M}+\frac{p^2}{2\mu}+U(r)$$

که در آن $M=m_1+m_2$ مجموع جرم‌های دو ذره است، $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ جرم کاهش یافته و k ثابت فنر است. $\vec{P}$ تکانه‌ی خطی کل دست‌گاه و $\vec{p}$ تکانه‌ی نظیر مختصه‌ی نسبی است $p^2=p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}$. ثابت‌های حرکت این مسأله عبارت‌اند از:

$$I_1=H=\frac{P^2}{2M}+\frac{p^2}{2\mu}+U(r)$$

$$I_2=P_X \quad ,I_3=P_Y$$

$$I_4=p_\theta$$

I_1 انرژی دست‌گاه است که ثابت بودن آن ناشی از تقارن تحت انتقال در زمان است. I_2 و I_3 مؤلفه‌های تکانه‌ی خطی مرکز جرم اند که ثابت بودن آن‌ها ناشی تقارن تحت انتقال در مکان است. I_4 تکانه‌ی زاویه‌ای است که ثابت بودن آن ناشی از تقارن تحت دوران است. این مسأله دو ثابت حرکت دیگر نیز دارد که ناشی از تقارن دست‌گاه تحت تبدیل خیز است. این ثابت‌ها عبارت‌اند از:

$$I_5=X-\frac{P_X}{M}t \quad ,I_6=Y-\frac{P_Y}{M}t$$

در این مثال می‌توان متغیرها را به دو بخش تقسیم کرد. یک بخش مربوط به حرکت مرکزجرم است با مختصات (X,Y) و بخش دیگر مربوط به حرکت نسبی با مختصات (r,θ). همان‌طور که دیده می‌شود در بخش اول چهار ثابت حرکت داریم که عبارت اند از I_2، I_3، I_5 و I_6 (توجه کنید که دو تا از این ثابت‌ها تابع صریح زمان اند)، بنابراین این بخش کاملاً ابرانتگرال‌پذیر است. اما در بخش دوم در حالت کلی فقط دو ثابت حرکت داریم که عبارت‌اند از $I_1-\frac{1}{2M}(I_2^2+I_3^2)=\frac{p^2}{2\mu}+U(r)$ و I_4. بنابراین این بخش انتگرال‌پذیر است ولی نه ابرانتگرال پذیر. در شرایط خاص این بخش هم می‌تواند ابرانتگرال‌پذیر باشد. مثلاً اگر نیروی میان دو ذره نیروی فنر یا نیرویی متناسب با عکس مجذور فاصله باشد، یک ثابت حرکت دیگر هم وجود خواهد داشت (که تابع صریح زمان نیست) و این بخش هم ابرانتگرال‌پذیر (در واقع کاملاً ابرانتگرال‌پذیر) خواهد بود. (می‌توان به‌جای یک ثابت حرکت که تابع صریح زمان نیست، دو ثابت حرکت یافت که تابع صریح زمان باشند. در این‌صورت با حذف متغیر زمان به یک ثابت حرکت مستقل از زمان دست خواهیم یافت). در مورد نیروی فنر، ثابت حرکت دیگر را می‌توانید به کمک قضیه و تمرینی که در بخش ۲ مقاله آورده شده است به‌دست آورید.

بد نیست به یک نکته‌ی دیگر هم توجه کنیم: در ثابت‌های حرکت مربوط به بخش اول (مرکزجرم) با حذف زمان میان ثابت‌های I_5 و I_6 ثابت حرکت مستقل از زمان $XP_Y - YP_X$ به دست می‌آید که درواقع تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مبدأ است. در این‌صورت سه ثابت حرکت مستقل از زمان داریم که باز هم نشان دهنده‌ی کاملاً ابرانتگرال‌پذیر بودن این بخش است.

۳-۳ استقلال ثابت‌های حرکت

در این‌جا باید به نکته‌ای در مورد مستقل بودن ثابت‌های حرکت اشاره کنیم. در شمارش ثابت‌های حرکت باید دقت کنیم که فقط ثابت‌های حرکتی را که از هم مستقل‌اند بشماریم. به عنوان نمونه مسأله‌ی ذره‌ی آزاد یک بعدی را در نظر بگیرید. در این مسأله تکانه‌ی خطی و انرژی هر دو ثابت حرکت اند ولی مستقل از هم نیستند زیرا انرژی را می‌توان بر حسب تکانه نوشت. در مسأله‌ی کپلر نیز ظاهراً هفت ثابت حرکت داریم (دو بردار که هر کدام معادل سه ثابت اند و یک انرژی). ولی می‌توان نشان داد که فقط پنج‌تای آن‌ها مستقل اند (اثبات این موضوع را به خواننده وامی‌گذاریم). حال سؤال این است که در حالت‌های پیچیده‌تر چه‌گونه می‌توان تشخیص داد که ثابت‌های حرکت به‌دست آمده از هم مستقل‌اند یا نه. برای این‌کار در فرمول بندی همیلتونی می‌توان روش زیر را به کار برد: هر ثابت حرکت تابعی از مختصات و تکانه‌های تعمیم یافته است. دیفرانسیل هر ثابت حرکت را نسبت به این متغیرها به دست می‌آوریم. به این ترتیب می‌توان برای هر ثابت حرکت یک بردار تعریف کرد که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از دیفرانسیل آن ثابت حرکت نسبت به مختصات و تکانه‌های تعمیم یافته. اگر این بردارها از هم مستقل خطی باشند، می‌گوییم ثابت‌های حرکت از هم مستقل اند. به‌عنوان نمونه در مورد مثال قبلی اگر متغیرها را به‌ترتیب $(X, Y, P_X, P_Y, r, \theta, p_r, p_\theta)$ در نظر بگیریم، این بردارها به ترتیب عبارت اند از:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \left(0, 0, \frac{P_X}{M}, \frac{P_Y}{M}, kr - \frac{p_\theta^2}{\mu r^3}, 0, \frac{p_r}{\mu}, \frac{p_\theta}{2\mu r^2}\right), \\
V_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
V_3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
V_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \\
V_5 &= \left(1, 0, -\frac{t}{M}, 0, 0, 0, 0, 0\right), \\
V_6 &= \left(0, 1, 0, -\frac{t}{M}, 0, 0, 0, 0\right)
\end{aligned}
$$

به‌سادگی می‌توان دید که این بردارها از هم مستقل‌اند. بنابراین ثابت‌های حرکت هم از هم مستقل اند.

در پایان اشاره به یک نکته را ضروری می‌دانیم. معادلات حرکت برای یک دست‌گاه با n درجه‌ی آزادی را می‌توان به شکل n معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی 2 (معادلات اویلر-لاگرانژ) یا $2n$ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی 1 (معادلات همیلتون) نوشت. در هر حال چنین دست‌گاهی از معادلات همیشه به طور موضعی $2n$ ثابت حرکت دارد. اما هر چنین دست‌گاهی الزاماً انتگرال‌پذیر نیست. علت این امر این است که، همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، برای انتگرال‌پذیر بودن باید n ثابت حرکت مستقل یافت که کروشه‌ی پواسون هر زوج از آن‌ها صفر باشد. برای همه‌ی دست‌گاه‌ها نمی‌توان چنین مجموعه‌ای از ثابت‌های حرکت یافت.

۴ قدردانی

ایده‌ی اولیه‌ی این مقاله در کار پژوهشی‌ای که توسط خانم‌ها راضیه امامی و زهرا قاسمی در دوره‌ی کارشناسی‌شان در دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان انجام شد شکل گرفت. از آقای دکتر احمد شریعتی و همین‌طور از داور محترم مقاله به خاطر خواندن مقاله و یادآوری چند نکته‌ی مهم و دقیق صمیمانه سپاس‌گزاریم.

مراجع

[1] H. Goldstein, "Classical Mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley 1980).

[۲] محمد خرمی، «تقارن و فرمول بندی لگرانژی»، گاما، شماره ی ۱۶ (پاییز ۱۳۸۶) صص ۴۸ تا ۶۴

[3] N. W. Evans, "Superintegrability in Classical Mechanics", Phys. Rev. A **41**, 5666 (1990).